



نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

گروه آموزشی :

تاریخ : / /

وقت : دقیقه

امتحان میان ترم درس : - ()

نیمسال (اول /) ۱۳ - ۱۳

توجه : مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.

۱۵ نمره - معادله $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0$ را حل کنید.

۲۰ نمره - بدون استفاده از هم‌ارزی و قاعده هوییتال ، حدهای زیر را محاسبه کنید :

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{3x+1} - \sqrt[3]{4x+1}} \quad (\text{الف}) \quad I_2 = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \tan \frac{\pi}{2} x \quad (\text{ب})$$

۱۵ نمره - مقدار تقریبی $\sin 44^\circ$ را محاسبه کنید.

- الف) وارون تابع $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$ را بیابید.

۱۵ نمره ب) اگر $f(x) = x^2 - 1$ و $g \circ f(x) = x^4 - 2x^2$ ، تابع $g(x)$ را بیابید.

۱۵ نمره - نمودار تابع $y = \operatorname{cosec} x$ را در بازه $(-\pi, \pi)$ بطور کامل رسم کنید.

$$(\text{توجه : } \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x})$$

:

روش اول: طرفین معادله را در $(1-z)$ ضرب می‌کنیم: $(1-z)(1+z+z^2+z^3+z^4+z^5)=0$

داریم $1-z^6=0$ و یا $z^6=1$. ریشه های ششم واحد عبارتند از $z_k = e^{\frac{k\pi i}{6}}$, $k=0,1,\dots,5$. اما جواب $z=1$ قابل قبول

نیست و ریشه های معادله اصلی عبارتند از: $z_k = e^{\frac{k\pi i}{6}}$, $k=1,2,3,4,5$ و یا: $z = \frac{1}{2}(\pm 1 \pm \sqrt{3}i)$, $z = -1$

روش دوم: داریم $(1+z)(1+z^2+z^4)=0$ اگر $1+z=0$ پس $z=-1$

و اگر $1+z^2+z^4=0$ آنگاه $z^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\pm \frac{\pi i}{3}}$ و در نتیجه $z = \pm e^{\pm \frac{\pi i}{3}} = \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

:

الف) قرار می‌دهیم: $A = \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{(3x+1)(4x+1)} + \sqrt[3]{(4x+1)^2}}$

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{3x+1} - \sqrt[3]{4x+1}} \times A \times \frac{1}{A} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{-x} \times \frac{1}{A} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{(3x+1)(4x+1)} + \sqrt[3]{(4x+1)^2}}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+1}} = \frac{3}{2}$$

ب) روش اول: $l_2 = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \tan \frac{\pi}{2} x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{\cos(\pi x/2)} \sin(\pi x/2) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{\sin((\pi/2) - (\pi x/2))} \sin(\pi x/2)$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{\sin(\pi/2 - \pi x/2)} \sin \frac{\pi}{2} x = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{-\sin(\pi(x-1)/2)} \sin \frac{\pi}{2} x = \frac{1}{-\pi/2} \times \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{2}{\pi}$$

روش دوم: (تغییر متغیر) $l_2 = \lim_{t \rightarrow 0} t \times \tan\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) = -\lim_{t \rightarrow 0} t \times \cot\left(\frac{\pi}{2}t\right) = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan(\pi t/2)} = -\frac{1}{-\pi/2} = -\frac{2}{\pi}$

:

می‌دانیم که 1° برابر $\frac{\pi}{180}$ رادیان است. تابع $y = \sin x$ را در نظر می‌گیریم. (مقدار واقعی $\sin 44^\circ = 0,694658$)

$$\begin{aligned} \sin 44^\circ &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{180}\right) \cong y\left(\frac{\pi}{4}\right) + y'\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \left(-\frac{\pi}{180}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \left(-\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{\pi}{180}\right) \\ &= 0,707 \times \left(1 - \frac{3,1416}{180}\right) = 0,707 \times (1 - 0,0174) = 0,707 \times 0,9826 = 0,694698 \end{aligned}$$

:

الف) تابع $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$ روی دامنه خود یعنی برای $|x| \geq 1$ یک به یک است پس وارون دارد. می‌نویسیم:

$$y - x = \sqrt{x^2 - 1} \rightarrow y^2 - 2xy + x^2 = x^2 - 1 \rightarrow x = \frac{y^2 + 1}{2y} \rightarrow y^{-1} = \frac{x^2 + 1}{2x}$$

ب) روش اول: داریم $g \circ f(x) = (x^2 - 1)^2 - 1 = (f(x))^2 - 1$ پس نتیجه می‌گیریم: $g(x) = x^2 - 1$

روش دوم : اگر بخواهیم $g(x)$ را حدس بزنییم اولین حدس تابع $g(x) = ax^2 + bx + c$ خواهد بود. با این حدس داریم :

$$g \circ f(x) = a(x^2 - 1)^2 + b(x^2 - 1) + c = ax^4 + (-2a + b)x^2 + (a - b + c) = x^4 - 2x^2$$

اکنون باید داشته باشیم : $a = 1$ ، $-2a + b = -2$ و $a - b + c = 0$ که نتیجه می دهد $b = 0$ و $c = -1$ یعنی : $g(x) = x^4 - 1$

روش سوم : تابع $f(x)$ در بازه $[0, \infty)$ یک به یک است و وارون دارد. $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$ بنابر این

$$g \circ f \circ f^{-1}(x) = (\sqrt{x+1})^4 - 2(\sqrt{x+1})^2 \rightarrow g(x) = x^2 + 2x + 1 - 2x - 2 \rightarrow g(x) = x^2 - 1$$

می توان دید که این برای بازه $(-\infty, 0)$ نیز قابل قبول است.

:

$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, D_f = (-\pi, \pi) - \{0\} \rightarrow \left| \begin{array}{l} x \rightarrow -\pi \\ y \rightarrow -\infty \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} x \rightarrow \pi \\ y \rightarrow \infty \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \pm\infty \end{array} \right|$$

$$y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}, y' = 0 \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} \rightarrow \left| \begin{array}{l} x \rightarrow -\pi/2 \\ y \rightarrow -1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} x \rightarrow \pi/2 \\ y \rightarrow 1 \end{array} \right|$$

x	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π					
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$				
y	$-\infty$	\nearrow	-1	\searrow	$-\infty$	$+\infty$	\searrow	$+1$	\nearrow	$+\infty$

